ESEMPIO DI SECONDA PROVA – GIUGNO 2019

PROBLEMA 1[i]

Marco è alla guida della sua automobile e sta percorrendo un lungo tratto rettilineo di autostrada ad una velocità costante che il tachimetro digitale indica pari a $108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

1) Quale è la velocità dell’automobile espressa in metri al secondo, cioè in unità del Sistema Internazionale (S.I.)?

Ad un certo punto Marco vede davanti a lui, sulla carreggiata, un ostacolo e al fine di bloccare la macchina, aziona, istante $t = 0$, il pedale del freno. L’automobile rallenta rapidamente con una decelerazione che, espressa in unità S.I., si suppone data, in funzione del tempo, dalla relazione $a(t) = -6t^2 - t$.

2) Si calcoli, arrotondato ai centesimi di secondo, l’istante t_F in cui la macchina si ferma illustrando il metodo seguito.
3) Si consideri la velocità media nei primi 2 $secondi$ di frenatura: si mostri che esiste un istante, in tale intervallo di tempo, in cui l’automobile viaggia esattamente a questa velocità. Si stabilisca se tale istante appartiene all’ intervallo $]0; 1[$ o all’intervallo $[1; 2[$[ii]
4) Se all’istante $t = 0$ d’inizio frenata, l’ostacolo si trovasse ad una distanza di 60 metri, Mario riuscirebbe ad evitare l’impatto? Si giustifichi la risposta.

PROBLEMA 2[iii]

Un generatore, avente una resistenza interna r ed una forza elettromotrice f, alimenta una resistenza R.

1. Si verifichi che l’espressione della potenza P dissipata in R è data da: $\frac{f^2R}{(R+r)^2}$
2. Si definiscano tutte le grandezze fisiche in gioco, specificandone l’unità di misura nel S.I..
3. Supposta R variabile, si rappresenti graficamente la funzione P = φ (R), determinando in particolare il valore di R per cui la potenza dissipata è massima.
4. Si dica che cosa succede se la resistenza interna r del generatore è trascurabile rispetto al carico esterno R.

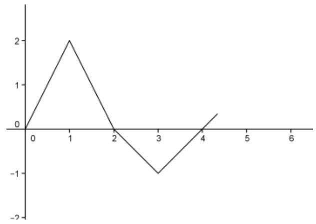
QUESTIONARIO

1. Sia $P(x) = x^2 + bx + c$. Si suppone che $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ e che $P(1) \neq P(2)$. Si calcoli $P(0)$.[iv]

2. Un gioiello è stato realizzato prevalentemente in oro e la sua forma geometrica è un tetraedro regolare di spigolo $\sqrt{2}\ cm$. L'oro impiegato nella realizzazione del gioiello ha densità relativa 19,32, una quotazione di 29,06 euro al grammo ed occupa il 75% del volume del tetraedro. Quale è stato il costo dell'oro nella realizzazione del gioiello?[v]

3. Il seguente problema figura nel libro di Maria Gaetana Agnesi "Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana" del 1748: "Date le velocità di due mobili, la distanza loro, e la differenza del tempo, in cui principiano a moversi sopra una retta linea, si dimanda il punto nella linea, ed il tempo, in cui si raggiungeranno". Si risolva il problema e se ne attualizzi la formulazione riferendosi, eventualmente, ad una situazione reale.[vi]

4. La funzione f ha il grafico in figura. Se $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, per quale valore positivo di x, g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.[vii]



5. La posizione di una particella è data da $s(t) = 20(2e^{-\frac{t}{2}} + \ t - 2)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?[viii]
6. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità ≥ 0,99 di colpirlo almeno una volta? [ix]
7. In un libro si legge: *"se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p.es. 0,38%), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76%)"*. E' così? Si motivi esaurientemente la risposta.[x]
8. La dialettica continuo-discreto in matematica e il dualismo onda-corpuscolo in fisica. Si dica brevemente dell'una e dell'altra e se c'è un'analogia tra le due problematiche.[xi]

Durata della prova: cinque ore

L'esempio contiene sia quesiti originali, sia già assegnati nelle decorse sessioni d'esame. Hanno contribuito alla proposta: Adriana Lanza (Roma), Domenico Bruno (Catania), Serenella Iacino (Roma), Francesco Sicolo (Bari), Nicola Fusco (Bari), Pasqualina Ventrone (Caserta) e Emilio Ambrisi.

NOTE

[i] Il problema era stato proposto per la sessione 2015 ma non assegnato
[ii] In questo punto 3 la domanda iniziale era: "Si calcoli tale istante, arrotondandone il valore ad una cifra decimale". È stata cambiata perché i QdR non fanno riferimento alle approssimazioni. Ma è ovvio si tratta di una "delicatezza"

eccessiva e impropria in contraddizione con i QdR di fisica (punto 1) e dunque da superare a meno di negare ai giovani di sapere cosa è numero e cosa è misura e cosa sono la matematica e la fisica.

[iii] Il problema è una proposta dell'isp. Domenico Bruno

[iv] riguarda il secondo dei 27 argomenti del QdR di matematica

[v] Punto 3 del QdR di matematica e punti 1-3 del QdR di Fisica

[vi] QdR di matematica: "I problemi potranno avere carattere astratto, applicativo o anche contenere riferimenti a testi classici o momenti storici significativi della matematica". Punti 1-3 del Qdr di Fisica

[vii] Punti 15-18 del QdR di matematica. Assegnato 2013

[viii] Assegnato nel 2012, punti 17-19 del QdR di matematica e i punti

[ix] Punti 25-26 del QdR di matematica

[x] Assegnato 2014

[xi] Riguarda il punto 17 del QdR di Fisica in una visione interdisciplinare

I 27 argomenti di matematica

1. Utilizzare le diverse rappresentazioni dei numeri, riconoscendone l'appartenenza agli insiemi N, Z, Q, R e C. Interpretare geometricamente le operazioni di addizione e di moltiplicazione in C.
2. Mettere in relazione le radici di un polinomio, i suoi fattori lineari ed i suoi coefficienti. Applicare il principio d'identità dei polinomi.
3. Risolvere, anche per via grafica, equazioni e disequazioni algebriche (e loro sistemi) fino al 2° grado ed equazioni o disequazioni ad esse riconducibili.
4. Utilizzare i risultati principali della geometria euclidea, in particolare la geometria del triangolo e del cerchio, le proprietà dei parallelogrammi, la similitudine e gli elementi fondamentali della geometria solida; dimostrare proposizioni di geometria euclidea, con metodo sintetico o analitico.
5. Servirsi delle funzioni circolari per esprimere relazioni tra gli elementi di una data configurazione geometrica.
6. Scegliere opportuni sistemi di riferimento per l'analisi di un problema.
7. Determinare luoghi geometrici a partire da proprietà assegnate.
8. Porre in relazione equazioni e disequazioni con le corrispondenti parti del piano.
9. Applicare simmetrie, traslazioni e dilatazioni riconoscendone i rispettivi invarianti.
10. Studiare rette, coniche e loro intersezioni nel piano nonché rette, piani, superfici sferiche e loro intersezioni nello spazio utilizzando le coordinate cartesiane.
11. Analizzare le proprietà di iniettività, suriettività, invertibilità di funzioni definite su insiemi qualsiasi. Riconoscere ed applicare la composizione di funzioni.
12. Applicare gli elementi di base del calcolo combinatorio.
13. Analizzare le proprietà di parità, monotonia, periodicità di funzioni definite sull'insieme dei numeri reali o su un suo sottoinsieme.
14. Individuare le caratteristiche fondamentali e i parametri caratteristici delle progressioni aritmetiche e geometriche e delle funzioni polinomiali, lineari a tratti, razionali fratte, circolari, esponenziali e logaritmiche, modulo e loro composizioni semplici.

15. A partire dall'espressione analitica di una funzione, individuare le caratteristiche salienti del suo grafico e viceversa; a partire dal grafico di una funzione, tracciare i grafici di funzioni correlate: l'inversa (se esiste), la reciproca, il modulo, o altre funzioni ottenute con trasformazioni geometriche.
16. Discutere l'esistenza e determinare il valore del limite di una successione definita con un'espressione analitica o per ricorrenza.
17. Discutere l'esistenza e determinare il valore del limite di una funzione, in particolare i limiti, per x che tende a 0, di sen(x)/x, $(e^x-1)/x$ e limiti ad essi riconducibili.
18. Riconoscere le caratteristiche di continuità e derivabilità di una funzione e applicare i principali teoremi riguardanti la continuità e la derivabilità.
19. Determinare la derivata di una funzione ed interpretarne geometricamente il significato.
20. Applicare il calcolo differenziale a problemi di massimo e minimo.
21. Analizzare le caratteristiche della funzione integrale di una funzione continua e applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
22. A partire dal grafico di una funzione, tracciare i grafici della sua derivata e di una sua funzione integrale.
23. Interpretare geometricamente l'integrale definito e applicarlo al calcolo di aree.
24. Determinare primitive di funzioni utilizzando integrali immediati, integrazione per sostituzione o per parti.
25. Determinare la probabilità di un evento utilizzando i teoremi fondamentali della probabilità, il calcolo combinatorio, il calcolo integrale.
26. Valutare la dipendenza o l'indipendenza di eventi casuali.
27. Analizzare la distribuzione di una variabile casuale o di un insieme di dati e determinarne valori di sintesi, quali media, mediana, deviazione standard, varianza.

I 25 argomenti del QdR di Fisica

1. Rappresentare, anche graficamente, il valore di una grandezza fisica e la sua incertezza nelle unità di misura appropriate. Rappresentare e interpretare, tramite un grafico, la relazione tra due grandezze fisiche.
2. Valutare l'accordo tra i valori sperimentali di grandezze fisiche in relazione alle incertezze di misura al fine di descrivere correttamente il fenomeno osservato.
3. Determinare e discutere il moto di punti materiali e corpi rigidi sotto l'azione di forze.
4. Utilizzare il concetto di centro di massa nello studio del moto di due punti materiali o di un corpo rigido.
5. Utilizzare le trasformazioni di Galileo o di Lorentz per esprimere i valori di grandezze cinematiche e dinamiche in diversi sistemi di riferimento.
6. Determinare e discutere il moto relativistico di un punto materiale sotto l'azione di una forza costante o di una forza di Lorentz.
7. Applicare le relazioni relativistiche sulla dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze e individuare in quali casi si applica il limite non relativistico.
8. Determinare l'energia cinetica di un punto materiale in moto e l'energia potenziale di un punto materiale sottoposto a forze.
9. Mettere in relazione la variazione di energia cinetica, di energia potenziale e di energia meccanica con il lavoro fatto dalle forze agenti.

10. Utilizzare la conservazione dell’energia nello studio del moto di punti materiali e di corpi rigidi e nelle trasformazioni tra lavoro e calore.
11. Determinare la densità di energia di campi elettrici e magnetici e applicare il concetto di trasporto di energia da parte di un’onda elettromagnetica.
12. Applicare l’equivalenza massa-energia in situazioni concrete tratte da esempi di decadimenti radioattivi, reazioni di fissione o di fusione nucleare.
13. Interpretare lo spettro di emissione del corpo nero utilizzando la legge di distribuzione di Planck.
14. Determinare le frequenze emesse per transizione tra i livelli energetici dell’atomo di Bohr.
15. Determinare la lunghezza d’onda, la frequenza, il periodo, la fase e la velocità di un’onda armonica e le relazioni tra queste grandezze.
16. Discutere fenomeni di interferenza con riferimento a onde armoniche sonore o elettromagnetiche emesse da due sorgenti coerenti.
17. Discutere anche quantitativamente il dualismo onda-corpuscolo.
18. Descrivere la condizione di quantizzazione dell'atomo di Bohr usando la relazione di De Broglie.
19. Applicare l’equazione di Einstein dell’effetto fotoelettrico.
20. Descrivere l’azione delle forze gravitazionali elettriche e magnetiche mediante il concetto di campo.
21. Rappresentare un campo elettrico o magnetico utilizzando le linee di forza.
22. Utilizzare il teorema di Gauss per determinare le caratteristiche di campi elettrici generati da distribuzioni simmetriche di cariche e per discutere il comportamento delle cariche elettriche nei metalli.
23. Utilizzare il teorema di Ampère per determinare le caratteristiche di un campo magnetico generato da un filo percorso da corrente e da un solenoide ideale.
24. Descrivere e interpretare fenomeni di induzione elettromagnetica e ricavare correnti e forze elettromotrici indotte.
25. Determinare la forza agente su un filo di lunghezza infinita percorso da corrente in presenza di un campo magnetico, la forza tra due fili di lunghezza infinita paralleli percorsi da corrente e la forza che agisce su un ramo di un circuito in moto in un campo magnetico per effetto della corrente indotta. Determinare il momento delle forze magnetiche agenti su una spira percorsa da corrente in presenza di un campo magnetico uniforme